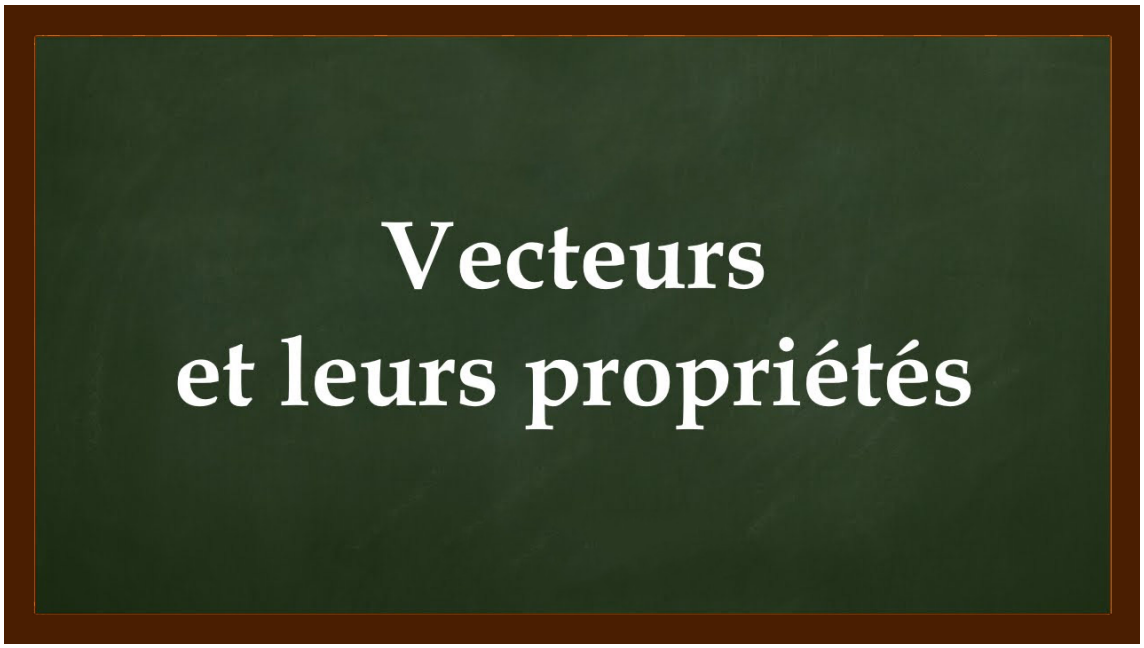
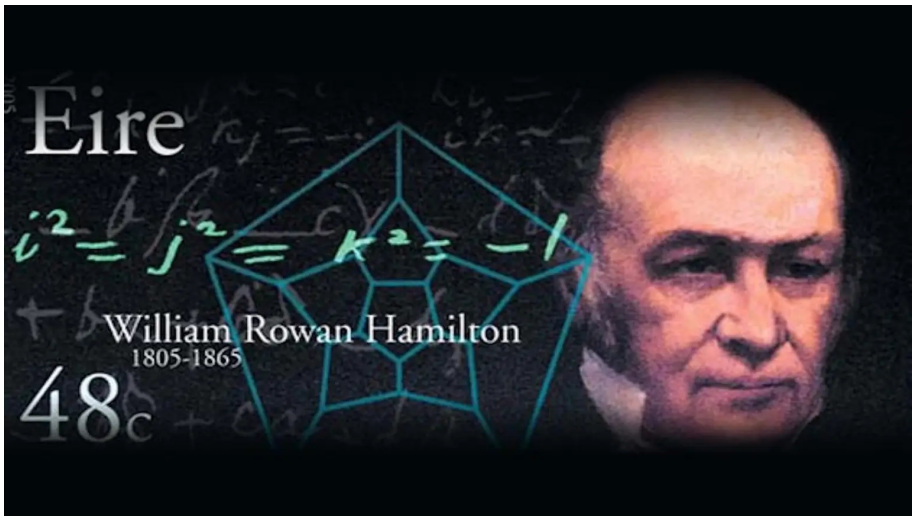
Chapitre I : Les vecteurs (partie 1)



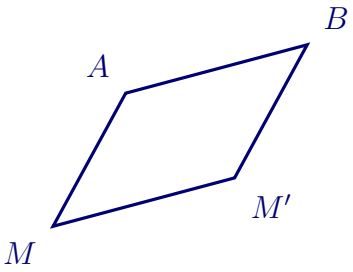


I. Notion de vecteur.

1. **Parallélogramme : Rappels et compléments.**

DÉFINITION 1

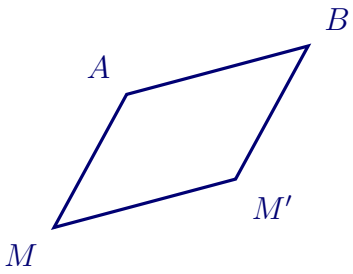
Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.



2. **Translation et vecteur.**

DÉFINITION 2

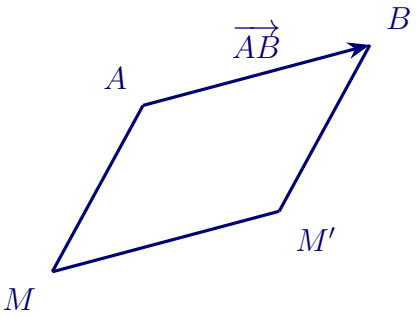
Soit A et B deux points distincts du plan. La translation qui transforme A en B est la transformation du plan qui à tout point M associe l'unique point M' tel que ABM'M soit un parallélogramme.



M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B

DÉFINITION 3

La translation qui transforme A en B est appelée translation de **vecteur** $\overrightarrow{AB}$.



REMARQUE(S)

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est représenté par une flèche allant du point A au point B. On dit que le point A est l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et que le point B est l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Si on veut désigner le vecteur $\overrightarrow{BA}$, on ne change pas le sens de la flèche mais on change l'origine et l'extrémité du vecteur.
- La translation qui transforme A en A est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$. Ce vecteur est alors appelé **vecteur nul** et il est noté $\overrightarrow{0}$.

II. Définitions et propriétés des vecteurs.

1. **Caractérisation.**

DÉFINITION 4

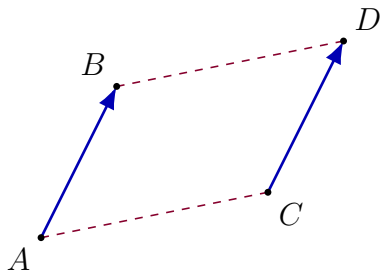
Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par 3 éléments :

- **Sa direction** : celle de la droite (AB),
- **Son sens :** le sens de A vers B,
- **Sa norme, notée** $\|\overrightarrow{AB}\|$ **:** la longueur AB.

2. **Égalité de 2 vecteurs.**

DÉFINITION 5

Soit A, B, C et D 4 points du plan. Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie que D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On note alors : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Conséquences de la définition :

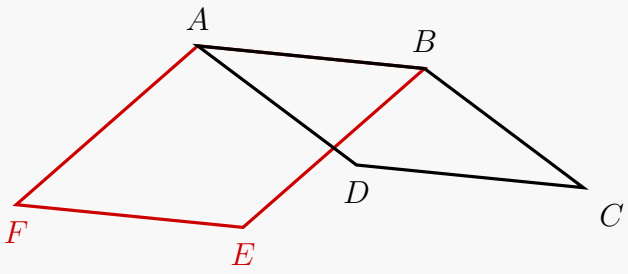
PROPRIÉTÉ 1

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si le quadrilatère $AB\underline{DC}$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
  ⚠ Attention à l'ordre : $AB\underline{DC}$ et non pas $AB\underline{CD}$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si **ils ont la même direction, le même sens et la même norme.**

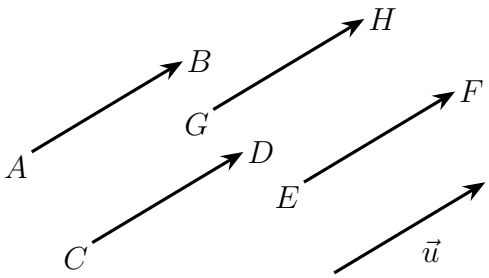
EXERCICE(S) D'APPLICATION

(a) Placer 3 points A, B, C non alignés. Construire un point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

(b) $ABCD$ et $ABEF$ sont deux parallélogrammes. Montrer que $DCEF$ est un parallélogramme.



3. **Représentants d'un vecteur.**
Étant donné deux points A et B, on peut construire une infinité de parallélogrammes dont un côté est le segment $[AB]$. On obtient ainsi une infinité de vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.



On dit que tous ces vecteurs sont des représentants d'un même vecteur, qu'on note à l'aide d'une lettre, souvent $\vec{u}$. Ils ont tous même direction, même sens et même norme.

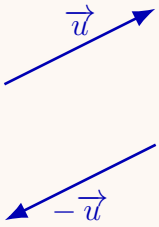
4. **Vecteurs opposés.**

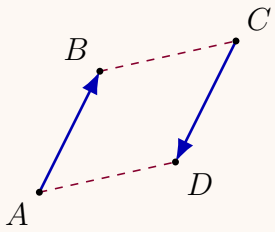
DÉFINITION 6

L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ est le vecteur noté $-\vec{u}$ ayant la même direction, la même norme mais de sens contraire.

EXEMPLE 1

Les vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ sont opposés. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont opposés ($\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$) :





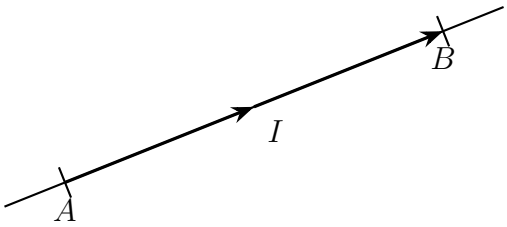
REMARQUE(S)

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés.

5. **Milieu d'un segment.**

PROPRIÉTÉ 2

Soit A et B deux points distincts. I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

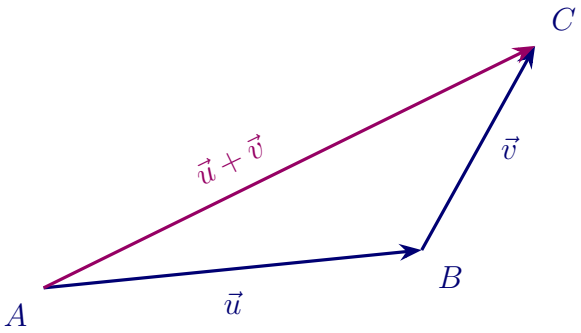


III. Somme de vecteurs.

1. **Définition**

DÉFINITION 7

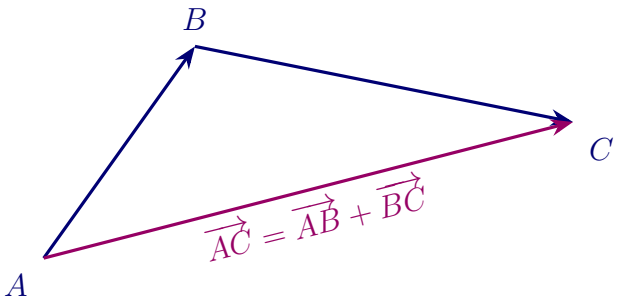
Si on applique la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$, on obtient une nouvelle translation. Le vecteur qui lui est alors associé est appelé **somme des vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note ce vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



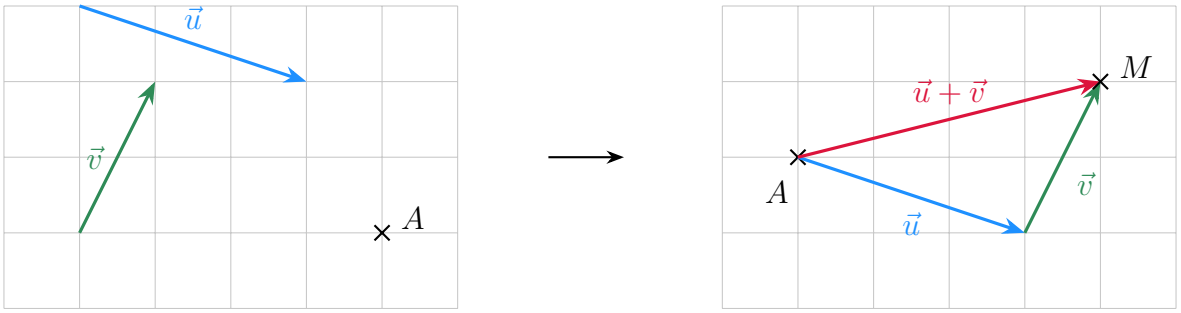
2. **Relation de Chasles.**

PROPRIÉTÉ 3

Propriété admise : Quels que soient les points A, B et C du plan : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

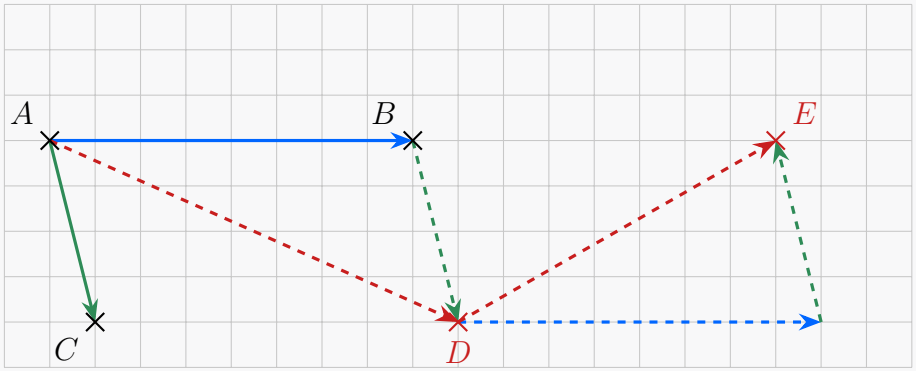


3. **Application : construction de la somme de 2 vecteurs.**
Construire le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$: On utilise la relation de Chasles :



EXERCICE(S) D'APPLICATION

Sur la figure ci-dessous, construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, le point E tel que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB}$



4. **Propriétés algébriques.**

PROPRIÉTÉ 4

Propriétés admises : Soient 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

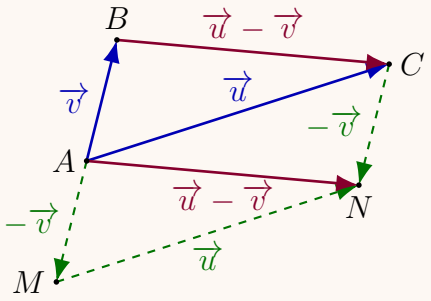
5. **Différence de 2 vecteurs.**

DÉFINITION 8

Soustraire un vecteur, **c'est ajouter son opposé.**
Ainsi, la différence des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} - \vec{v}$, est le vecteur $\vec{u} + (-\vec{v})$.

EXEMPLE 2

Construction de $\vec{u} - \vec{v}$ de 3 façons : comme $\vec{u} + (-\vec{v})$ (avec $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$), ou comme $-\vec{v} + \vec{u}$ ou encore comme $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$



IV. Produit d'un vecteur par un réel.

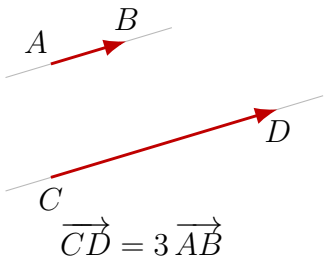
REMARQUE(S)

$|k|$ est la valeur absolue du nombre k définie par :
$|k| = k$ si $k \geqslant 0$
et $|k| = -k$ si $k < 0$.

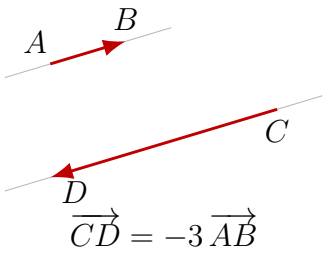
DÉFINITION 9

Soit k un nombre réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur différent du vecteur nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur ayant :

- la même direction que $\vec{u}$,
- le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et de sens contraire à $\vec{u}$ si $k < 0$,
- et pour norme $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$.



$\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$

PROPRIÉTÉ 5

Propriétés admises : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k et k' deux réels. On a :

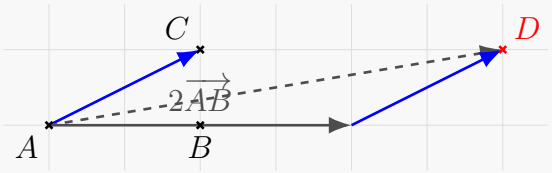
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $(kk')\vec{u} = k(k'\vec{u})$
- $0\vec{u} = \vec{0}$

EXEMPLE 3

$2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$.
$3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB}$.
$2(3\overrightarrow{AB}) = 6\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE(S) D'APPLICATION

Soient A, B et C trois points non alignés.
Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



DÉFINITION 10

Deux vecteurs non nuls ayant la même direction sont dits **colinéaires**. Ainsi, pour tout réel k, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $k\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

REMARQUE(S)

Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tout vecteur. On reverra cette notion en détail dans le chapitre sur la géométrie repérée.