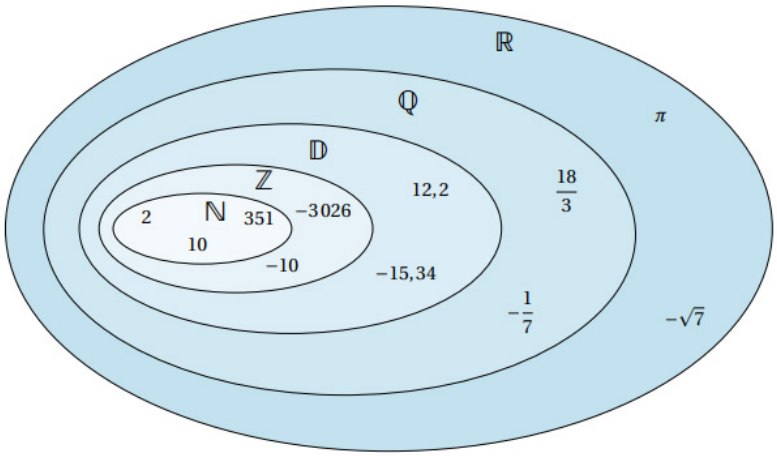
# Chapitre 2 : Ensembles de nombres et intervalles.



# I. Les ensembles de nombres.

## 1. Nombres entiers naturels.

**DÉFINITION 1**

L'ensemble des **nombres entiers naturels** est l'ensemble des nombres entiers positifs, c'est-à-dire les nombres 0, 1, 2, 3... Il est noté $\mathbb{N}$.
On a ainsi : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

## 2. Nombres entiers relatifs.

**DÉFINITION 2**

L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est formé des nombres entiers naturels et de leurs opposés. Il est noté $\mathbb{Z}$.
On a ainsi : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

**REMARQUES**

- La notation $\mathbb{Z}$ vient de "zahlen" qui signifie "nombres" en allemand.
- On dit aussi que $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers (sans préciser "relatifs").
- $\mathbb{Z}$ contient tous les éléments de $\mathbb{N}$. **On dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$** et on note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

**Attention :** Ne pas confondre la notation $\in$ avec la notation $\subset$. Un nombre appartient à un ensemble, par exemple $2 \in \mathbb{Z}$ mais un ensemble est inclus dans un autre ensemble, par exemple $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

## 3. Nombres décimaux.

**DÉFINITION 3**

L'ensemble des nombres décimaux est formé des nombres de la forme $\dfrac{n}{10^k}$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$. Il est noté $\mathbb{D}$.

Exemples : $0{,}01 \in \mathbb{D}$ car $0{,}01 = \dfrac{1}{100}$, $\dfrac{3}{5} \in \mathbb{D}$ car $\dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{10}$, $\dfrac{1}{2} \in \mathbb{D}$ car $\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{10}$, $17 \in \mathbb{D}$ car $17 = \dfrac{17}{10^0}$.

**Attention :** De nombreux nombres écrits sous la forme d'une fraction n'appartiennent pas à $\mathbb{D}$. Par exemple $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

**DÉMONSTRATION**

Montrons « par l'absurde » que $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.
Supposons que $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$, alors il existe un entier $n$ et un entier naturel $k$ tels que $\frac{1}{3} = \frac{n}{10^k}$.
Donc $10^k = 3n$ et donc $10^k$ est un multiple de 3 (ou divisible par 3).
Or $10^k$ est un nombre formé du chiffre 1 et de zéros, donc la somme de ses chiffres est égale à 1 et donc il ne peut pas être divisible par 3.
On arrive donc à une contradiction et donc $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

**REMARQUES**

- $\mathbb{D}$ est formé des nombres dont l'écriture décimale possède un nombre fini de chiffres (non nuls à partir d'un certain rang) après la virgule.
- Tout nombre entier est un nombre décimal donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

4. **Nombres rationnels.**

**DÉFINITION 4**

L'ensemble des **nombres rationnels** est formé des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p$ est un entier relatif et $q$ est un entier naturel non nul. L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemples : $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{-2}{13} \in \mathbb{Q}$, $-3{,}871 \in \mathbb{Q}$.

**REMARQUES**

- Par définition, tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction (décimale) donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
- Certains nombres réels vus au collège ne sont pas des nombres rationnels, par exemple $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. La démonstration sera faite plus tard dans l'année.
- L'écriture décimale d'un nombre rationnel qui n'est pas décimal est **illimitée et périodique** : à partir d'un certain rang, un même bloc de chiffres se répète indéfiniment. Par exemple :

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\,3\ldots \qquad \frac{5}{6} = 0{,}833\,3\ldots \qquad \frac{1}{7} = 0{,}142857\,142857\ldots$$

**Exemple :** On note $x = 1{,}999\,9\ldots$ (le chiffre 9 se répète indéfiniment). Que vaut $x$ ?
En multipliant par 10, on décale la virgule : $10x = 19{,}999\,9\ldots$
Les deux nombres ont la même partie décimale, donc en faisant la différence :

$$10x - x = 19{,}999\,9\ldots - 1{,}999\,9\ldots = 18 \qquad \text{donc} \qquad 9x = 18 \qquad \text{donc} \qquad x = \frac{18}{9} = 2.$$

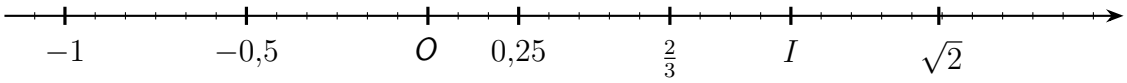
**REMARQUES**

- Ce calcul n'est pas une démonstration rigoureuse : on a calculé avec une écriture qui possède une infinité de chiffres comme avec un nombre ordinaire, ce qu'il faudrait justifier. Le résultat est pourtant juste : $1{,}999\,9\ldots$ et 2 sont **deux écritures du même nombre**.
- On peut le retrouver autrement : $\frac{1}{3} = 0{,}333\,3\ldots$ donc, en multipliant par 3, $1 = 0{,}999\,9\ldots$
- Ainsi $1{,}999\,9\ldots$ est un nombre décimal, même si cette écriture comporte une infinité de chiffres : il admet aussi l'écriture finie 2.

5. **Nombres réels.**

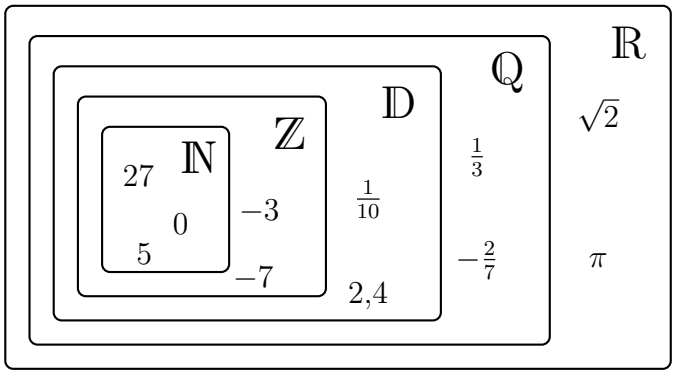
**DÉFINITION 5**

On considère une droite munie d'un repère $(O\,;I)$. **L'ensemble des nombres réels** est l'ensemble des abscisses des points de cette droite, appelée droite numérique. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.




**REMARQUES**

- Tous les nombres rencontrés au collège sont des nombres réels.
  $\sqrt{2}$ et $\pi$ sont des nombres réels qui ne sont pas des nombres rationnels. On dit que ce sont des nombres **irrationnels.**
- La géométrie fournit de tels nombres : $\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 (d'après le théorème de Pythagore) et $\pi$ est la longueur d'un cercle de diamètre 1.
- L'écriture décimale d'un nombre irrationnel est illimitée et non périodique : $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,56\ldots$ et $\pi = 3{,}141\,592\,65\ldots$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



6. **Encadrement et arrondi.**

**DÉFINITIONS 6 ET 7**

Soit $x$ un nombre réel et $n$ un entier naturel.
Donner un **encadrement décimal** de $x$ à $10^{-n}$ près, c'est déterminer deux nombres décimaux $a$ et $b$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $b - a \leqslant 10^{-n}$.
Le nombre $b - a$ est appelé l'**amplitude** de l'encadrement.

**Exemple :** $3{,}141 \leqslant \pi \leqslant 3{,}142$ est un encadrement de $\pi$ à $10^{-3}$ près, c'est-à-dire d'amplitude $3{,}142 - 3{,}141 = 0{,}001$.

**REMARQUE**

**Arrondir** un nombre réel à $10^{-n}$ près, c'est choisir, parmi les deux bornes de son encadrement à $10^{-n}$ près ayant $n$ décimales, celle qui est la plus proche du nombre. Par exemple $\pi = 3{,}141\,59\ldots$ donc $\pi \approx 3{,}142$ (arrondi au millième) et $\pi \approx 3{,}14$ (arrondi au centième).

# II. Intervalles réels

**DÉFINITION 8**

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $a \leqslant b$.

- L'intervalle $[a\,;b]$ est l'ensemble des nombres réels $x$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$.
- L'intervalle $[a\,;+\infty[$ est l'ensemble des nombres réels $x$ tels que $x \geqslant a$.
- L'intervalle $]-\infty\,;a]$ est l'ensemble des nombres réels $x$ tels que $x \leqslant a$.

**REMARQUE**

Pour exclure une borne d'un intervalle, on utilise un crochet tourné vers l'extérieur. Par exemple, l'intervalle $]a\,;b]$ est l'ensemble des nombres réels $x$ tels que $a < x \leqslant b$.

| Ensemble des nombres réels $x$ | Représentation | Intervalle |
|---|---|---|
| $a \leqslant x \leqslant b$ |   | $[a\,;b]$ |
| $a \leqslant x < b$ |   | $[a\,;b[$ |
| $x < b$ |   | $]-\infty\,;b[$ |
| $x \geqslant a$ |   | $[a\,;+\infty[$ |

**REMARQUES**

- Les deux réels qui délimitent un intervalle sont appelés les bornes de l'intervalle.
- $+\infty$ et $-\infty$ ne désignent pas des nombres réels, du côté de $+\infty$ et de $-\infty$, le crochet est toujours ouvert. L'ensemble $\mathbb{R}$ peut se noter : $]-\infty\,;+\infty[$.

**Exemples :**

- L'intervalle $[1\,;3[$ est l'ensemble de tous les nombres réels compris entre 1 et 3, 1 inclus et 3 exclu.
- L'intervalle $]-\infty\,;-2[$ est l'ensemble de tous les nombres réels strictement inférieurs à $-2$.

**REMARQUES**

- On peut noter l'ensemble des réels positifs de 2 façons : $[0\,;+\infty[$ ou $\mathbb{R}^+$. De la même façon, on peut noter l'ensemble des réels négatifs : $]-\infty\,;0]$ ou $\mathbb{R}^-$.
- On peut noter l'ensemble des réels non nuls de 2 façons : $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ou $\mathbb{R}^*$.
- On peut aussi mélanger les notations : $\mathbb{R}^{*+}$ pour l'ensemble des réels strictement positifs et $\mathbb{R}^{*-}$ pour l'ensemble des réels strictement négatifs.

**DÉFINITION 9**

L'amplitude de l'intervalle $[a\,;b]$ (ou $]a\,;b]$, $[a\,;b[$, $]a\,;b[$) est le nombre $b-a$.

# III. Union et Intersection de deux intervalles.

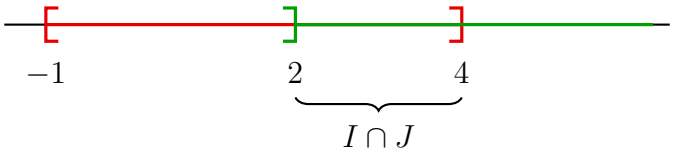
**DÉFINITION 10**

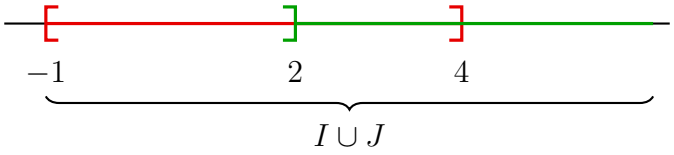
Soient $I$ et $J$ deux intervalles.
On appelle **intersection** de $I$ et $J$, et on note $I \cap J$, l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à la fois à $I$ et à $J$.

**DÉFINITION 11**

Soient $I$ et $J$ deux intervalles.
On appelle **union** de $I$ et $J$, et on note $I \cup J$, l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à $I$ ou à $J$ (ou aux deux).

**Exemple :** Soient les intervalles $I = [-1\,;4]$ et $J = ]2\,;+\infty[$. Leur intersection est l'intervalle $I \cap J = ]2\,;4]$ et leur union est l'intervalle $I \cup J = [-1\,;+\infty[$.




# IV. Valeur absolue.

**DÉFINITION 12**

Soit $x$ un nombre réel.
On appelle valeur absolue de $x$, et on note $|x|$, le nombre réel tel que :

- $|x| = x$ si $x \geqslant 0$
- $|x| = -x$ si $x \leqslant 0$

**Exemples :** $|4| = 4$ et $|-1{,}5| = 1{,}5$

**REMARQUE**

La valeur absolue de $x$ est la distance de $x$ à 0 sur la droite numérique.

**DÉFINITION 13**

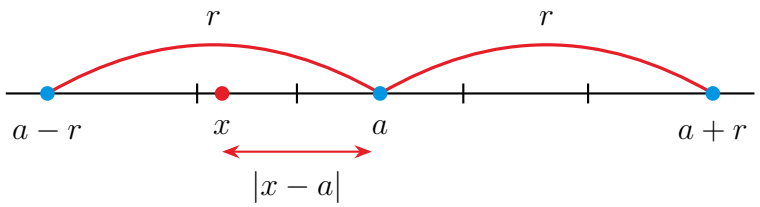
Soient $a$ et $x$ deux nombres réels.
La distance entre les nombres $a$ et $x$ est le nombre $|x-a|$.

**REMARQUE**

Pour tous nombres réels $x$ et $a$ : $|x-a| = |a-x|$.

**PROPRIÉTÉ 1**

Soient $a$ et $r$ deux nombres réels (avec $r \geqslant 0$).
L'ensemble des nombres réels $x$ tels que $|x-a| \leqslant r$ est l'intervalle $[a-r\,;a+r]$.




**DÉMONSTRATION**

Soient $a$, $x$ et $r$ trois nombres réels (avec $r \geqslant 0$).
$x \in [a-r\,;a+r]$ ssi $a-r \leqslant x \leqslant a+r$ ssi $-r \leqslant x-a \leqslant r$ (1) (en soustrayant $a$).
**1er cas :** $x-a \geqslant 0$. Alors $|x-a| = x-a$.
L'inégalité $-r \leqslant x-a$ est toujours vraie (car $-r \leqslant 0 \leqslant x-a$), donc (1) équivaut à $x-a \leqslant r$, c'est-à-dire à $|x-a| \leqslant r$.
**2e cas :** $x-a < 0$. Alors $|x-a| = a-x$.
L'inégalité $x-a \leqslant r$ est toujours vraie (car $x-a < 0 \leqslant r$), donc (1) équivaut à $-r \leqslant x-a$, c'est-à-dire à $a-x \leqslant r$ (en multipliant par $-1$), soit $|x-a| \leqslant r$.
Dans les deux cas : $x \in [a-r\,;a+r]$ ssi $|x-a| \leqslant r$.

**Exemples :**

- La distance entre les nombres $-10$ et $-4$ est égale à $|-4-(-10)| = |6| = 6$.
- En prenant $a = 5$ et $r = 0{,}1$ : $x \in [4{,}9\,;5{,}1]$ ssi $|x-5| \leqslant 0{,}1$ ce qui revient à dire que la distance entre les nombres $x$ et 5 est inférieure ou égale à 0,1.
- Déterminons l'ensemble des réels $x$ tels que $|x+2| \leqslant 5$.
  $|x+2| \leqslant 5$ ssi $|x-(-2)| \leqslant 5$ ssi $-2-5 \leqslant x \leqslant -2+5$ ssi $-7 \leqslant x \leqslant 3$ ssi $x \in [-7\,;3]$.